Παρασκευή 18/12/20

Διαστήματα Εμπιστοσύνης:

Έστω $X_1 \dots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$
Ζητάμε ένα διάστημα της μορφής $(L(X), R(X))$ με $L<R$ που
όπου $L(X), R(X)$ στατιστικές συναρτήσεις με μεγάλη πιθανότητα, η πιθανότητα
θα περιέχει τη θ με μεγάλη $\boxed{P(L(X) \leq \theta \leq R(X))}$ είναι συνάρτηση
αυτή ισούται με $P(L(X) \leq \theta \leq R(X))$ και καλείται **πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος**
του θ και καλείται πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος

Το διάστημα $(L(X), R(X))$ με την ιδιότητα
$P(L(X) \leq \theta \leq R(X)) \geq 1-a$, $\forall \theta \in \Theta$, δηλαδή έχει βαθμό
εμπιστοσύνης τουλάχιστον $1-a$ είναι το $100(1-a)\%$ Δ.Ε
για την παράμετρο θ.

Προσοχή:
Απαιτούμε $\geq 1-a$ αντί $= 1-a$ γιατί σε πολλά προβλήματα
δεν είναι δυνατό να βρούμε Δ.Ε με β.Ε ακριβώς
$1-a$ π.χ όταν η κατανομή του δειγμ. είναι διακριτή).

Η μεγάλη πιθανότητα πρακτικά ερμηνεύεται ως μεγάλο
ποσοστό φορών. Άρα αν επαναλάβουμε το πείραμα 100
φορές και υπολογίσουμε τα διαστήματα
$(L(X_k), R(X_k))$, $k=1..100$ περιμένουμε η σχετική συχνότητα
των διαστημάτων που περιέχουν το θ να είναι $1-a$.

Η εύρεση των $100(1-a)\%$ Δ.Ε γίνεται με τη μέθοδο της
αντιστρεπτής ποσότητας.

Αντιστρεπτή ποσότητα:
Έστω τ.δ $X_1 \dots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x|\theta)$
μια τυχαία μεταβλητή $Q = Q(X, g(\theta))$ λέγεται αντιστρεπτή
ποσότητα για την $g(\theta)$ αν εξαρτάται από την παράμετρο θ
μόνο μέσω της $g(\theta)$ και η κατανομή της είναι ανεξάρτητη
της θ

Στην πράξη για την κατασκευή ενός $100(1-a)\%$ Δ.Ε. της $g(\theta)$ βρίσκουμε έναν εκτιμητή της θ και την κατανομή του. Βάση της κατανομής αυτής εντοπίζουμε μια αντιστρέψιμη ποσότητα. Και καθορίζουμε σταθερές q_1, q_2 τ.ω $P(q_1 \le Q \le q_2) = 1-a \quad \forall \theta \in \Theta$

Από στατιστική συμπερασματολογία γνωρίζουμε ότι
Αν τ.δ $X_1, \ldots X_n$ από συνεχή κατανομή F_θ, $\theta \in \Theta$ τότε α) $Q = -2\sum_{i=1}^{n} \log F_\theta(X_i) \sim \chi^2_{2n}$

β) $Q = -2\sum_{i=1}^{n} \log(1-F_\theta(X_i)) \sim \chi^2_{2n}$

και είναι αντιστρέψιμες ποσότητες

Στη συνέχεια λύνουμε την ανισότητα $q_1 \le Q \le q_2$ ως προς $g(\theta)$ και καταλήγουμε στο $(L(X), R(X))$ με την ιδιότητα $P(L(X) \le g(\theta) \le R(X)) = 1-a$

Τα q_1, q_2 μπορούν να καθοριστούν με άπειρους τρόπους. άρα τα Δ.Ε δεν είναι μοναδικά.

Μεταξύ Δ.Ε με ίδιο Β.Ε ένα κριτήριο επιλογής είναι η ελαχιστοποίηση του μήκους του και ένα άλλο η επιλογή Δ.Ε ίσων ουρών.

Παράδειγμα: Αν $X_1, \ldots X_n$ τ.δ από κανονική κατανομή $N(\theta, \sigma^2)$ με $\theta \in \Theta$ και σ^2 γνωστό να βρεθεί το $100(1-a)\%$ Δ.Ε ελαχίστου μήκους για το θ.

$$Q(X) = \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Το $100(1-a)\%$ Δ.Ε που θα ικανοποιεί τη σχέση
$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1-a$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_2 + \bar{X} \leq \theta \leq -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_1 + \bar{X}\right) = 1-a. \quad (1)$$

$$l = (q_2 - q_1)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

Η σχέση (1) ισοδυναμεί με τη σχέση $\Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$
όπου Φ η αθρ. σ.κ της $N(0,1)$

Τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν ταυτόχρονα το μήκος l
και τη σχέση (2) είναι $q_1 = -q_2$, $q_2 = z_{\frac{a}{2}}$

Άρα $100(1-a)\%$ Δ.Ε ελάχιστου μήκους είναι
$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}\right)$$

Παράδειγμα:
Αν $X_1, \dots X_n$ τ.δ. από κανονική κατανομή $N(\mu, \theta)$ με $\theta \in \Theta = [0, +\infty)$
και μ γνωστή να βρεθεί $100(1-a)\%$ Δ.Ε για τη θ.

$$Q(X, \theta) = \frac{(n-1)S^2}{\theta} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Ξεκινώντας από τη σχέση
$P\left(q_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\theta} \leq q_2\right) = 1-a$. καταλήγουμε στο $100(1-a)\%$
Δ.Ε του θ $\left[\frac{(n-1)S^2}{q_2}, \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right]$

Αν για τον προσδιορισμό των q_1 και q_2 επιλέξουμε το κριτήριο ελάχιστου μήκους, χρειάζεται αριθμητική ολοκλήρωση.
Προσδιορίζουμε τα q_1 και q_2 μέσω του κριτηρίου ίσων ουρών.
Τα q_1, q_2 επιλέγονται έτσι ώστε:

$$P(Q \leq q_1) = P(Q > q_2) = a/2.$$

Καταλήγουμε στο Δ.Ε.

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,a/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}} \right)$$

Διαστήματα κατά Bayes:

Η παράμετρος θ είναι τ.μ. άρα έχει νόημα να μιλάμε για την πιθανότητα να πάρει τιμή σε κάποιο σύνολο.
Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται βάσει της ΕΧ της εκ των υστέρων κατανομής του θ.
Η έννοια του ΔΕ ή του συνόλου εμπιστοσύνης αντικαθίσταται από εκείνη του αξιόπιστου συνόλου.

Αξιόπιστο Σύνολο:

Ένα υποσύνολο C του παραμετρικού χώρου Θ είναι ένα $100(1-a)\%$ αξιόπιστο σύνολο για το θ αν

$$P_P(\theta \in C|x) = \int_{\theta \in C} p(\theta|x)\,d\theta \geq 1-a.$$

Αν ένα $100(1-a)\%$ αξιόπιστο σύνολο είναι συνεκτικό διάστημα τότε λέγεται $100(1-a)\%$ αξιόπιστο διάστημα.

Παράδειγμα:

Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ από την κατανομή $N(\theta,\sigma^2)$, σ^2 γνωστή. Να βρεθεί ένα $100(1-a)\%$ αξιόπιστο διάστημα για τη μέση τιμή θ, με εκ των προτέρων $N(\mu,\tau^2)$, μ,τ^2 γνωστά.

Σε προηγούμενο διάστημα δείξαμε

$$\theta|X \sim N\left(\frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2}, \frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\theta-\frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2}}{\frac{\tau\sigma}{\sqrt{n\tau^2\sigma^2}}} \sim N(0,1)$$

και $P\left(\frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2} - z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}} \leq \theta \leq \frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2} + z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}}\right)$

$= 1-a$

Άρα αξιόπιστο διάστημα

$$\left(\frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2} - z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}}, \frac{n\tau^2\bar{X}+\sigma^2\mu}{n\tau^2+\sigma^2} + z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}}\right)$$

Αν $p(\theta)=1$ (μη πληροφοριακή εκ των προτέρων) τότε

$\theta|\underline{X} \sim N(\bar{X}, \sigma^2/n)$

Άρα το αξιόπιστο διάστημα με το Δ.Ε ταυτίζονται